1. állomás – MEGOLDÁS

Algebrai törtek értelmezési tartománya

Határozd meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi algebrai törtek értelmezhetők!

1. $\frac{5x-3y}{z^2+1}$ $\quad\boxed{\forall\, z \in \mathbf{R}}$

2. $\frac{-5}{2x+7}+\frac{2x+3}{1-x}$ $\quad\boxed{\mathbf{R}\setminus\{-\frac{7}{2};\, 1\}}$

3. $\frac{a+1}{2a^2-12a+18}=\frac{a+1}{2(a-3)^2}$ $\quad\boxed{\mathbf{R}\setminus\{3\}}$

4. $\frac{a+4}{a^3-4a}=\frac{a+4}{a(a^2-4)}=\frac{a+4}{a(a+2)(a-2)}$ $\quad\boxed{\mathbf{R}\setminus\{-2;0;2\}}$

2. állomás - MEGOLDÁS

Algebrai törtek egyszerűsítése

Egyszerűsítsd az alábbi törteket!

Egyszerűsítés előtt határozd meg az eredeti kifejezések értelmezési tartományát is!

1. $\frac{72a^4b^6}{108b^5a} = \boxed{\frac{2a^3b}{3}}$ $\quad a \neq 0,\ b \neq 0$

2. $\frac{xy}{xy+x} = \frac{xy}{x(y+1)} = \boxed{\frac{y}{y+1}}$ $\quad x \neq 0, y \neq -1$

3. $\frac{x^2-8x+16}{5x-20} = \frac{(x-4)^2}{5(x-4)} = \boxed{\frac{x-4}{5}}$ $\quad x \neq 4$

4. $\frac{-12x+3x^2+12}{x^2-4} = \frac{3(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \boxed{\frac{3(x-2)}{x+2}}$ $\quad x \neq 2,\ x \neq -2$

3. állomás - MEGOLDÁS

Algebrai törtek szorzása, osztása

Végezd el a műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

1. $\frac{9a^2b^4}{5a^3b} \cdot \frac{7a^4b^2}{15ab^3} \boxed{= \frac{21a^2b^2}{25}}$ $\quad a \neq 0,\ b \neq 0$

2. $\frac{6a^3 - 3a^2}{x} \div 3a^2x = \frac{3a^2(2a-1)}{x \cdot 3a^2x} \boxed{= \frac{2a-1}{x^2}}$ $\quad a \neq 0, x \neq 0$

3. $\frac{a^2 + ab}{ab - b^2} \cdot \frac{ab^2 - b^3}{a^3 + a^2b} = \frac{a(a+b)}{b(a-b)} \cdot \frac{b^2(a-b)}{a^2(a+b)} \boxed{= \frac{b}{a}}$ $\quad a \neq 0,\ b \neq 0$ $\quad a \neq b, a \neq -b$

4. $\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 - xy} \div \frac{x^2 + xy}{x^3 - x^2y} = \frac{(x+y)^2}{x(x-y)} \cdot \frac{x^2(x-y)}{x(x+y)} \boxed{= x + y}$ $\quad x \neq 0, x \neq y, x \neq -y$

4. állomás – MEGOLDÁS

<u>Algebrai törtek egyszerűsítése - nehezebb feladatok</u>

Egyszerűsítsd az alábbi törteket!

Egyszerűsítés előtt határozd meg az eredeti kifejezések értelmezési tartományát is!

1. $$\frac{a^2-a-6}{-8-2a^2-8a}=\frac{(a+2)(a-3)}{-2(a+2)^2}\boxed{=-\frac{a-3}{2(a+2)}}\qquad a\neq -2$$

2. $$\frac{3x^2-6xy+3y^2}{12x^2-12y^2}=\frac{3(x-y)^2}{12(x+y)(x-y)}\boxed{=\frac{x-y}{4(x+y)}}\qquad x\neq y,\ x\neq -y$$

3. $$\frac{15x^2-3x}{a-15x^2+3x-5ax}=\frac{3x(5x-1)}{-(3x+a)(5x-1)}\boxed{=-\frac{3x}{3x+a}}$$

$$x\neq \frac{1}{5},\ x\neq -\frac{a}{3}$$

4. $$\frac{a^3-9a^2+27a-27}{a^2+2a-15}=\frac{(a-3)^3}{(a-3)(a+5)}\boxed{=\frac{(a-3)^2}{a+5}}\qquad a\neq -5, a\neq 3$$

5. állomás – MEGOLDÁS

Algebrai törtek szorzása, osztása - nehezebb feladatok

Végezd el a műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

1. $$\frac{x^2-5x+6}{x^2+4-4x}\cdot\frac{2x^2-8x}{x^2-7x+12}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{2x(x-4)}{(x-3)(x-4)}\boxed{=\frac{2x}{x-2}}$$

$x\neq 2, x\neq 3, x\neq 4$

2. $$\frac{5a^4-5b^4}{3a^2-3ab}\div\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+ab}=\frac{\left(a^2+b^2\right)(a+b)(a-b)}{3a(a-b)}\cdot\frac{a(a+b)}{(a+b)^2}=$$

$$\boxed{=\frac{5\left(a^2+b^2\right)}{3}}$$

$a\neq 0, a\neq b, a\neq -b$

3. $$\frac{16b+b^3-8b^2}{16-b^2}\div\frac{4b^2-b^3}{16b^2+8b^3+b^4}=\frac{b(b-4)^2}{(4-b)(b+4)}\cdot\frac{b^2(b+4)^2}{b^2(4-b)}\boxed{=b(b+4)}$$

$b\neq 0, b\neq -4, a\neq 4$

4. $$\frac{3x^3-3y^3}{x^2+y^2-2xy}\cdot\frac{6x^2-6y^2}{2x+2y}=\frac{3(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{(x-y)^2}\cdot\frac{6(x+y)(x-y)}{2(x+y)}=$$

$$=9\left(x^2+xy+y^2\right)\boxed{=9x^2+9xy+9y^2}$$

$x\neq y, x\neq -y$

6. állomás – MEGOLDÁS

Algebrai törtek szorzása, osztása - nehezebb feladatok, bizonyítási feladatok

Végezd el a műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

1. $\frac{4a^2-24a+36}{a^2-7a+12}\cdot\frac{a^3-64}{-24-4a+4a^2}=\frac{4(a-3)^2}{(a-3)(a-4)}\cdot\frac{(a-4)(a^2+4a+16)}{4(a-3)(a+2)}=$

$$\boxed{=\frac{a^2+4a+16}{a+2}}$$

$a\neq -2, a\neq 3, a\neq 4$

2. $\frac{2a^3+6a^2+6a+2}{a^4-a^2}\div\frac{2a^3+4a^2+2a}{a^4+a^2-2a^3}=\frac{2(a+1)^3}{a^2(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a^2(a-1)^2}{2a(a+1)^2}\boxed{=\frac{a-1}{a}}$

$a\neq 0, a\neq -1, a\neq 1$

3. **Bizonyítási feladat:**

   Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, akkor $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$, a$\neq 0, c\neq 0, a+c\neq 0$

   Megoldás:

   A feltétel szerint $b^2=ac$, így $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+ac}{ac+b^2}=\frac{a(a+c)}{c(a+c)}=\frac{a}{c}$

   (Gerőcs-Orosz-Paróczay-Szászné S. J.: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I., 737. feladat)

4. **Bizonyítási feladat:**

   Egy háromtagú összeg tagjai: két szomszédos egész szám négyzete, valamint szorzatuk négyzete. Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg mindig négyzetszám!

   Megoldás:

   A kisebbik egész számot t vel jelölve:
   $t^2+(t+1)^2+(t(t+1))^2 = t^4+2t^3+3t^2+2t+1=(t^2+t+1)^2$, mely egy egész szám négyzete.
   (Gerőcs-Orosz-Paróczay-Szászné S. J.: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I., 697. feladat)